Berry's paradox and the incompleteness theorem

菊池, 誠

数理解析研究所講究録
第 847 巻 1993 年 56-60

Berry's paradox and the incompleteness theorem

東北大・理 菊池 誠 (MAKOTO KIKUCHI)

Boolos は [1] で Berry の逆理を用いて「算術の真となるすべての言明を含み，偽となる言明を含まないような出力を持つアルゴリズムは存在しない」という定理を証明している．この定理は第一不完全性定理の系として得られる命題ではあるが，前原 [5] が指摘するように第一不完全性定理そのものよりは弱く，また，Boolos の証明から第二不完全性定理は直接には得られない．

そこで本稿では，Boolos の証明を改良して Berry の逆理から第一不完全性定理を証明し，またその証明から第二不完全性定理を導く方法を簡単に紹介する．なお，簡単のため以下では Peano arithmetic についてのみの証明を与えるが，他の Peano arithmetic の extension についても同様である．

1. 準備

$\mathcal{L}_{PA} = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ を一階の算術の言語とし，離散的な順序の付いた半環の公理と数学的帰納法からなる $\mathcal{L}_{PA}$ の theory を Peano arithmetic（以下 PA）とする．Bounded quantifier を持たない論理式を Δ_0 formula と呼び，Δ_0 formula の前にいくつかの existential quantifier が付いた形の論理式を Σ_1 formula という．このとき ϕ が Σ_1 formula なら $(\forall x < t)\phi$ 及び $(\exists x < t)\phi$ も Σ_1 formula（と PA 上同値）になる．また，自然数上の n 項関係 $R \subseteq \mathbb{N}^k$ が recursively enumerable であることと R が Σ_1 formula で定義可能なグラフを持つことが同値である．

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

任意の論理式 $\phi(x)$ について，$PA \vdash \phi(n)$ が任意の n について成り立つとき $(\exists x)\neg\phi(x)$ は PA から証明可能でないならば PA は ω-無矛盾 であるという．

Proposition 1.1. 任意の Σ_1 sentence ϕ について，
(i) ϕ が真ならば $PA \vdash \phi$，
(ii) PA が ω-無矛盾 のとき，$PA \vdash \phi$ ならば ϕ は真.

証明は Smoryński [4] を参照のこと．

$Pr_{PA}(x)$ を「x は PA から証明可能な論理式の Gödel 数」ということを意味する Σ_1 formula とし，$Con(PA)$，ω-$Con(PA)$ をそれぞれ PA は無矛盾，ω-無矛盾ということを意味する論理式とする．例えば，$Con(PA) \Leftrightarrow \neg Pr_{PA}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$，$\omega\text{-}Con(PA) \Leftrightarrow (\forall x)((\forall y)Pr_{PA}(x(\dot{y})) \rightarrow \neg Pr_{PA}((\exists y)\neg x(y)))$， ただし $\dot{y}$ は y の numeral．詳しくは Smoryński [4] を見よ．

$Pr_{PA}(x)$ は Σ_1 formula なので次の系が得られる．

Corollary 1.2. 任意の $\mathcal{L}_{PA}$ sentence ϕ について，
(i) $PA \vdash \phi$ ならば $PA \vdash Pr_{PA}(\ulcorner\phi\urcorner)$，
(ii) PA が ω-無矛盾のとき，$PA \vdash Pr_{PA}(\ulcorner\phi\urcorner)$ ならば $PA \vdash \phi$．

2. 第一不完全性定理

「２０文字以内では定義できない最小の自然数」 は実際に２０文字で定義されているというのが Berry の逆理である．この逆理は「定義する」という言葉を分析することによって容易に解消できる．例えば，$\phi(x)$ を $\mathcal{L}_{PA}$-formula として，n が $\phi(n)$ を満たす唯一の自然数であるとき $\phi(x)$ は n を「定義する」ということにすると，$\mathcal{L}_{PA}$ は「一階の」言語なので i 文字以内では定義できない最小の自然数 m_i は $\mathcal{L}_{PA}$ の論理式では定義できない．それが，もし TA (=True Arithmetic) が recursively zsiomatizable ならある自然数 i が存在して m_i が i 文字以内の論理式で定義可能になる，というのが Boolos の証明の要点である．

Boolos の証明と我々の証明の違いは「定義する」という言葉の定義にある．

Definition 2.1. $\phi(v_0)$ を $\mathcal{L}_{PA}$-formula，n を自然数とする．$\phi(\dot{n})\wedge(\forall x\forall y)(\phi(x)\wedge\phi(y)\to x=y)$ が PA から証明可能なとき $\phi(v_0)$ は n を定義するという．

もし PA が無矛盾なら各 $\mathcal{L}_{PA}$-formula は高々一つの自然数しか定義しないことは明らか．以下，論理式 $\phi(\dot{n})\wedge(\forall x\forall y)(\phi(x)\wedge\phi(y)\to x=y)$ の Gödel 数を $\nu(\ulcorner\phi(v_0)\urcorner,n)$ と書く．

$P(x,y)$ を「x は束縛変数を $v_1,\cdots,v_{y-1}$ のなかから，また自由変数として v_0 のみを持つ y 文字以内の $\mathcal{L}_{PA}$ の論理式の Gödel 数」を意味する Σ_1 formula とする．$\mathcal{L}_{PA}$ は有限個の nonlogical symbols しか持たないので，各自然数 $j\in$ に対して自然数 n_j が存在して

$$\mathrm{PA}\vdash(\forall x)(P(x,j)\to x<n_j)$$

が成り立つ．

次に $Q(x,y)$ を $(\exists z)(P(z,y)\wedge Pr_{PA}(\nu(z,x)))$，$R(x,y)$ を $\neg Q(x,y)\wedge(\forall z<x)Q(z,y)$ と定義する．このとき $Q(x,y)$，$(\forall z<x)Q(z,y)$ はともに Σ_1 formula．$R(x,y)$ は「x は $P(\ulcorner\phi(v_0)\urcorner,y)$ を満たす論理式 $\phi(v_0)$ では定義されない最小の自然数」を意味する．k を $R(x,y)$ に現われる記号の数，$r=10\cdot k$ とし，ρ を closed term $\dot{10}\cdot\dot{k}$，$S(x)$ を $R(x,\rho)$ と定義する．$S(x)$ は「x は r 文字以内では定義できない最小の自然数」を意味する．Boolos [1] と同様に，$S(x)$ に現われる記号の数は r 以下となり，$S(v_0)$ の Gödel 数 s は $P(s,\rho)$ を満たす．

以下 PA は無矛盾と仮定する．$\{\phi(v_0)\mid P(\ulcorner\phi(v_0)\urcorner,\rho)\text{ is true}\}$ に属する論理式の数は n_r 以下で，各論理式は高々一つの自然数しか定義しないので，$0,1,\cdots,n_r$ のうち少なくとも一つは $P(\ulcorner\phi(v_0)\urcorner,\rho)$ を満たす論理式 $\phi(v_0)$ では定義されない．つまり，$\neg Q(m,\rho)$ を真とする自然数 $m\le n_r$ が存在する．その中で最小のものを m と

する．このとき m は「r 文字以内では定義できない最小の自然数」．また，$(\forall z < m)Q(z,\rho)$ は正しい Σ_1 sentence なので，この論理式は PA から証明可能．

Theorem 2.2. (第一不完全性定理).
(i) PA が無矛盾なら，$\neg Q(m,\rho)$ は PA からは証明可能でない．
(ii) PA が ω-無矛盾なら，$Q(m,\rho)$ は PA からは証明可能でない．

Proof. (i) $\neg Q(m,\rho)$ が PA から証明可能であると仮定する．$(\forall z < m)Q(z,\rho)$ は PA から証明可能なので $PA \vdash S(m)$．よって $S(m) \wedge (\forall x \forall y)(S(x) \wedge S(y) \to x = y)$ が PA から証明可能となり，Corollary 1.2 (i) から $PA \vdash Pr_{PA}(\nu(s,m))$．$P(s,\rho)$ は真である Σ_1 sentenceなので Theorem 1.1 (i) から $PA \vdash P(s,\rho)$．ゆえに $(\exists x)(P(x,\rho) \wedge Pr_{PA}(\nu(x,m)))$ が PA から証明可能となり，$PA \vdash Q(m,\rho)$．よって PA は矛盾する．

(ii) PA が ω-無矛盾であり，$Q(m,\rho)$ が PA から証明可能であると仮定する．$Q(m,\rho)$ は Σ_1 sentenceなので，Theorem 1.1 (ii) から $Q(m,\rho)$ は真．これは m の選び方に矛盾． □

3. 第二不完全性定理

前節での第一不完全性定理の証明から，r 文字以内では定義できない最小の自然数 m は，ある PA の超準モデル $\mathfrak{M}$ の上では r 文字以内で定義可能となり，$\mathfrak{M}$ 上で r 文字以内では定義できない最小の自然数 m' は m よりも大きくなることが分かる．このことをうまく用いると，Smoryński [4] に紹介されている Kreisel による第二不完全性定理のモデル論的な証明と同様の方法によって第二不完全性定理が得られる．その概略を以下で述べる．

PA が無矛盾で，かつ PA から $Con(PA)$ が証明可能であるとすると，算術化された完全性定理を用いて上の議論を PA のモデルの上で繰り返し展開することが可能となり，PA の超準モデルの列 $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ とそれぞれのモデルの上で r 文字以内

で定義できない自然数の単調増加列 $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ が存在することになる．しかし，r 文字以内で定義できない数は PA のいかなるモデルの上でも n_r 以下なので矛盾が生じる．よって，PA が無矛盾なら $Con(PA)$ は PA からは証明できない．

詳しくは Kikuchi [2] を参照のこと．

References

1. Boolos, G., *A new proof of the Gödel incompleteness theorem*, Notices of A.M.S. **36** (1989), 388-390.
2. Kikuchi, M., *A note on Boolos' proof of the incompleteness theorem*, manuscript.
3. Kreisel, G., *Notes on arithmetical models for consistent formulae of the predicate calculus*, Fund. Math. **37** (1950), 265-285.
4. Smoryński, C. A., *The incompleteness theorem*, Handbook of Mathematical Logic (J. Barwise, ed.), North-Holland, 1977, pp. 821-865.
5. 前原 昭二, ブーロス氏の原稿を見て, 現代思想 1989 年 12 月号, 80-82.